
Mathématiques et civilisation

ANDRÉ ROSS
CÉGEP DE LÉVIS-LAUZON

Vers le calcul différentiel et intégral

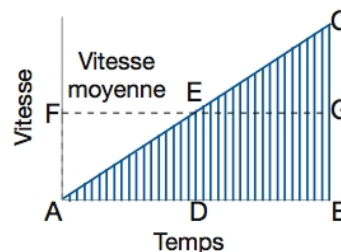
Dès l'époque grecque, les mathématiciens s'étaient intéressés aux problèmes de la tangente, de la quadrature des courbes (aire délimitée par la courbe), de la rectification des courbes (le calcul de la longueur de la courbe), du volume d'un solide. La recherche de solutions générales à ces problèmes va s'accélérer à partir du XVII^e siècle.

Par les travaux de Nicole Oresme, Tycho Brahe, Johannes Kepler et Galilée s'est développée une nouvelle façon de construire la connaissance scientifique. La spéculation a fait graduellement place à une démarche basée sur la prise de mesures et la modélisation pour comprendre les phénomènes naturels. Dans cette nouvelle approche, les mathématiques vont jouer un rôle très important en développant de nouveaux supports à la réflexion et à la conceptualisation des phénomènes. En particulier, l'apport de l'algèbre, de la géométrie analytique et du calcul différentiel et intégral va être déterminant dans l'évolution de la science à partir de cette époque.

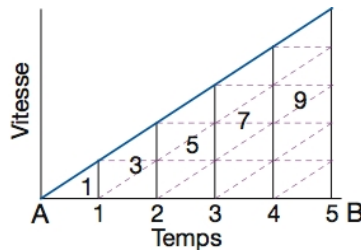
Avant de voir comment se sont faits les développements de la géométrie analytique et du calcul différentiel et intégral, rappelons certains développements scientifiques antérieurs et les questions que ceux-ci soulevaient.

NICOLE ORESME ET LE MOUVEMENT

Pour étudier le mouvement *uniformément difforme* (accélération constante), Oresme avait représenté le temps sur une droite horizontale et, en chaque instant, il élevait une perpendiculaire dont la longueur était proportionnelle à la vitesse du mobile en cet instant.



Grâce à cette représentation graphique, Oresme avait acquis la conviction que la distance parcourue était représentée par l'aire sous la courbe puisque cette aire est la somme de tous les accroissements de distance correspondant aux vitesses instantanées. En subdivisant l'intervalle de temps en parties égales, il faisait apparaître clairement sur la figure que les aires des trapèzes au dessus des intervalles sont dans la proportion 1,3,5,7.... Il en est donc de même des distances parcourues durant ces intervalles de temps.



Il indiquait alors : « *comme l'a remarqué le grand mathématicien grec Pythagore, on a :*

- 1 = 1 = 1 fois 1,
- 1 + 3 = 4 = 2 fois 2,
- 1 + 3 + 5 = 9 = 3 fois 3,
- 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4 fois 4,
- 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5 fois 5,
- etc ,

on obtient toujours un nombre carré. Par ce moyen on peut déterminer les rapports mutuels des quantités totales » (c'est l'expression qu'il emploie pour désigner l'aire).

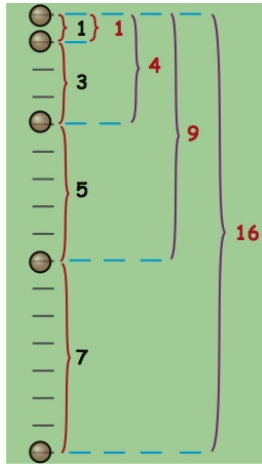
En représentant le temps par t et la distance parcourue par s , le résultat obtenu par Oresme, en écriture moderne, est :

$$s(t) = kt^2$$

GALILÉE ET LE MOUVEMENT

Dans ses expériences à l'aide du plan incliné, Galilée considérait comme unitaire la distance parcourue par la bille durant un premier intervalle de temps. Puis, il a observé que durant le deuxième intervalle, elle parcourait trois unités de distance ; durant le troisième intervalle, cinq unités de distance ; durant le quatrième intervalle, sept unités de distance ; ainsi de suite.

La somme des intervalles parcourus après chaque intervalle de temps est alors d'une unité de distance après un intervalle de temps, quatre unités de distance après deux unités de temps, neuf unités de distance après trois unités de temps, seize unités de distance après quatre unités de temps, ainsi de suite.

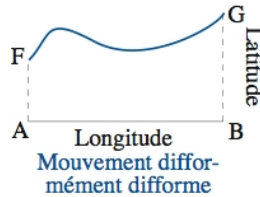


Galilée obtient donc expérimentalement le même résultat qu'Oresme, soit :

$$s(t) = k t^2$$

Ces études du mouvement soulèvent des questions importantes :

- La distance parcourue par un corps en *mouvement difformément difforme* est-elle également donnée par l'aire sous la courbe décrivant la vitesse en chacun des instants ?



- Comment trouver l'aire sous une telle courbe ?
- Peut-on déterminer à quel instant la vitesse d'un tel mouvement est maximale ? minimale ?

KEPLER ET LES ORBITES PLANÉTAIRES

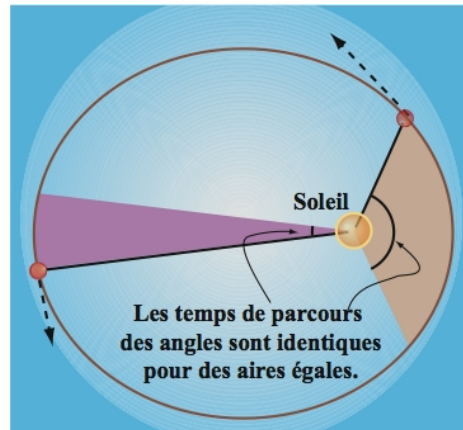
Les travaux de Kepler ont amené le même genre de questions. Rappelons ces trois lois.

Première loi

Chaque planète décrit une ellipse dont un des foyers est occupé par le Soleil.

Deuxième loi

La droite joignant une planète au Soleil balaie des aires égales en des temps égaux.



Troisième loi

Le carré du temps de révolution d'une planète autour de son orbite est proportionnel au cube de la distance moyenne au Soleil ($T^2 = k r^3$).

Avec les lois de Kepler, les orbites des planètes sont elliptiques et les vitesses sont variables. De plus, la direction d'un objet qui se déplace sur une courbe est tangente à la courbe. Ce qui soulève les problèmes suivants :

- Comment décrire efficacement une vitesse lorsqu'elle est variable ?
- À quel moment la vitesse de la planète sur son orbite est-elle minimale ?
- À quel moment la vitesse de la planète sur son orbite est-elle maximale ?
- Comment trouver la tangente en un point d'une courbe ?
- Comment trouver l'aire d'une figure délimitée par une ligne courbe ?

Au cours du XVII^e siècle, des savants de plusieurs pays vont contribuer à la recherche de solutions aux problèmes de la tangente, de la quadrature et de la rectification des courbes ainsi que du calcul du volume des solides. En France, trois hommes, nés à six ans d'intervalle, René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665) et Gilles Personne de Roberval (1602-1675), vont chercher des solutions à ces problèmes. Blaise Pascal (1623-1662) va également contribuer de façon significative malgré sa santé fragile, ses élans mystiques et son décès prématuré. Les échanges entre ces savants sont dus en grande partie à Marin Mersenne (1588-1648) qui recevait les hommes de sciences de l'époque dans sa cellule pour échanger sur les découvertes scientifiques et qui correspondait avec les savants étrangers comme Christiaan Huygens (1629-1695), Galilée (1564-1642) et Evangelista Torricelli (1608-1647), contribuant ainsi à faire connaître les résultats de ces savants et à stimuler la recherche.

En Italie, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) et Evangelista Torricelli vont s'intéresser à ces problèmes. Le premier va développer la méthode des indivisibles qui a donné des résultats intéressants malgré son manque de rigueur. En Grande-Bretagne, les précurseurs du calcul différentiel et intégral sont John Wallis (1616-1703), James Gregory (1638-1675) et Isaac Barrow (1630-1677). Dans ses ouvrages, Wallis a utilisé et rendu beaucoup plus accessibles les méthodes géométriques de Descartes.

Barrow a démissionné de sa chaire de mathématiques en 1669 pour laisser la place à Newton et consacrer son temps à la théologie.

Tous ces mathématiciens vont développer des méthodes intéressantes pour résoudre les problèmes posés, faisant la démonstration de beaucoup d'imagination créatrice et de la vitalité des mathématiques. Nous allons présenter certaines des approches développées pour illustrer cette diversité.

CAVALIERI ET LES INDIVISIBLES

Bonaventura Cavalieri était un mathématicien et un religieux italien né à Milan en 1598 et mort à Bologne le 3 décembre 1647. À l'âge de 7 ans, il joignit les rangs des jésuites¹ à Milan.



Bonaventura Cavalieri
(1598-1647)

En 1616, il fut transféré au monastère jésuite de Pise. L'étude des ouvrages d'Euclide a éveillé son intérêt pour les mathématiques. Le cardinal Frederico Borromeo, ayant constaté le génie de Cavalieri lors de son séjour au monastère de Milan, le présenta à Galilée. Après cette rencontre, Cavalieri considéra qu'il était un disciple de l'astronome. Il étudia la géométrie et les mathématiques avec Benedetto Castelli, qui enseignait à l'université de Pise. Il appliqua pour la chaire de mathématiques de l'université de Bologne en 1619, mais il fut jugé trop jeune pour un poste aussi prestigieux. Il tenta sa chance à l'université de Pise lorsque Castelli quitta pour Rome, mais sa candidature ne fut pas retenue. En 1621, il fut nommé diacre et assistant du Cardinal Frederico Borromeo au monastère de Milan. Il y enseigna la théologie jusqu'en 1623 lorsqu'il devint prieur de Saint-Pierre à Lodi, une ville de Lombardie au nord de l'Italie. Son séjour à Lodi dura trois ans et, en 1626, il se joignit au monastère jésuite de Parme jusqu'en 1629.

En 1629, il devint titulaire de la chaire de mathématiques de Bologne et il y enseigna les mathématiques jusqu'à sa mort en 1647. Ses travaux portent sur les mathématiques, l'optique et l'astronomie. Il fut en grande partie responsable de l'implantation rapide des logarithmes en Italie en publiant des tables qui contenaient les logarithmes des fonctions trigonométriques pour les astronomes. En 1632, il fit paraître un ouvrage intitulé *Directorium universale uranometricum*. Dans cet ouvrage, il donne des tables de rapports trigonométriques à huit décimales ainsi que leur logarithme. Lors de son

¹Appelé également Hiéronymite, ordre religieux, différent des jésuites mais que plusieurs auteurs confondent, qui avait Saint-Jérôme pour patron. Hiéronymite vient de « Hiéronymus », nom latin de Saint-Jérôme.

arrivée à Bologne, il avait déjà conçu la *méthode des indivisibles* qui a joué un rôle important dans le développement du calcul intégral. Cette méthode était une variante de la *méthode d'exhaustion* utilisée par Archimède et qui incorporait la théorie des quantités géométriques infiniment petites de Kepler. La méthode des indivisibles fut présentée en 1635 dans son ouvrage *Geometria indivisibilibus continuorum nova* (Traité des indivisibles). Dans cet ouvrage, il décrit sa méthode sans jamais définir clairement ce qu'il entend par indivisible.



Il a également produit des articles sur les sections coniques, la trigonométrie, l'optique, l'astronomie et l'astrologie. Il a même publié des livres en astrologie, l'un en 1639 et l'autre en 1646. Ce fut son dernier ouvrage. Cavalieri a correspondu avec plusieurs mathématiciens dont Galilée, Mersenne, Torricelli et Viviani. Sa correspondance avec Galilée compte 112 lettres.

CALCUL D'AIRES

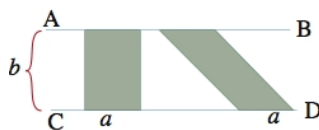
La méthode des indivisibles découlait d'une conception de la matière et du continu propre à certains philosophes scolastiques qui pensaient que la matière était composée de particules insécables ou atomes dont la nature diffère de celle de la matière. Dans cette conception, la décomposition de la matière est limitée puisque celle-ci est constituée de ces particules. La méthode des indivisibles de Cavalieri se fonde sur cette conception de la matière.

Dans son *Traité des Indivisibles*, Cavalieri conçoit une surface comme constituée par des droites parallèles équidistantes et un solide comme composé de plans parallèles équidistants. Le fondement

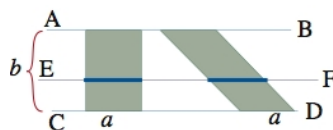
de sa méthode pour les surfaces s'énonce comme suit :

Si deux figures planes sont comprises entre deux droites parallèles et si toutes les intersections de ces figures avec une droite parallèle aux deux premières ont même longueur, alors les figures planes ont même aire.

Considérons l'exemple des deux figures planes de même base et de même hauteur que sont le rectangle et le parallélogramme de la figure suivante.



Ces deux figures sont incluses entre deux droites parallèles AB et CD . Si on trace une droite EF quelconque parallèlement aux droites AB et CD , les segments interceptés par cette droite sont tous deux de longueur a puisque des droites parallèles comprises entre deux parallèles ont même longueur.



Ceci étant vrai pour toutes les droites que l'on peut tracer parallèlement à AB et CD , il s'ensuit que l'aire du parallélogramme est égale à l'aire du rectangle, soit ab . On obtient donc que :

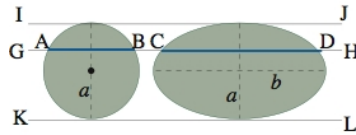
L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Sous sa forme généralisée, la méthode de Cavalieri fut utilisée pour trouver l'aire de figures dont les indivisibles sont dans un rapport constant :

Si deux figures planes ont même hauteur et si des sections qui sont obtenues par des lignes parallèles aux bases et à égale distance de celles-ci sont toujours dans un rapport donné, alors les aires des deux figures sont aussi dans le même rapport.

Cavalieri peut avoir été inspiré par les travaux de Kepler pour trouver l'aire en comparant des figures dont des sections sont toujours dans un rapport donné. En effet, Kepler a, en particulier, trouvé l'aire d'une ellipse de façon analogue, voici comment :

Considérons une ellipse dont la demi-longueur du grand axe est b et dont la demi-longueur du petit axe est a . Considérons également un cercle de rayon a . Ces deux figures peuvent être comprises entre des lignes parallèles IJ et KL , la distance entre ces parallèles étant $2a$.



En considérant une ligne GH parallèle aux droites IJ et KL , on détermine des segments AB et CD de telle sorte que la longueur de CD est toujours dans le rapport b/a , c'est-à-dire :

$$\overline{CD} = \frac{b}{a} \overline{AB}$$

Cette caractéristique étant vraie pour tous les segments ainsi déterminés, on peut conclure que l'aire de l'ellipse est dans le rapport b/a de l'aire du cercle. L'aire du cercle étant πa^2 , celle de l'ellipse est :

$$A = \frac{b}{a} \times \pi a^2 = \pi ab$$

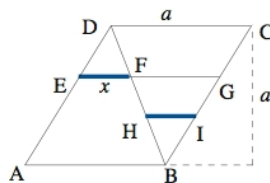
Puissance des lignes

Cavalieri a utilisé cette approche pour comparer ce qu'il appelle les *puissances des lignes* dans un parallélogramme. Ses résultats sont valides, mais sa démarche n'est pas très rigoureuse dans ses fondements. Illustrons cette démarche en considérant le parallélogramme $ABCD$, divisé en deux par la diagonale DB . En traçant EG parallèlement aux bases, on détermine dans le triangle ADB l'indivisible EF .

En déterminant $\overline{BI} = \overline{DE}$, on détermine dans le triangle BCD l'indivisible HI qui est égal à l'indivisible EF . En comparant un à un les indivisibles du triangle ABD à ceux du triangle BCD , il montre que les deux triangles sont égaux. L'aire du parallélogramme étant la somme des indivisibles de chaque triangle, la somme des premières puissances de ligne d'un des triangles est la moitié de la somme des premières puissances de ligne du parallélogramme :

$$\sum a = 2 \sum x = a^2.$$

d'où, en écriture moderne $\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$.



Il a, de cette façon, comparé les deuxièmes et troisièmes puissances des lignes pour obtenir que la somme du carré des lignes du parallélogramme et celle des lignes du triangle sont dans le rapport 3 à

1, c'est-à-dire $\sum a^2 = 3 \sum x^2$. Il montre également que le cube des lignes du parallélogramme et du triangle est dans le rapport 4 à 1, c'est-à-dire $\sum a^3 = 4 \sum x^3$. À partir de ces résultats, il généralise pour la puissance n^e des lignes, ce qui donne :

$$\sum a^{n+1} = (n + 1) \sum x^n$$

En écriture moderne, sa conjecture est la suivante :

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

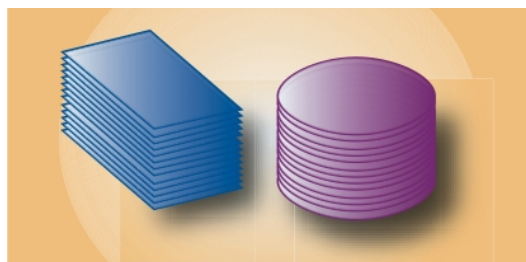
Il a démontré ce résultat pour $n \leq 9$ qui est valide et utilisé de nos jours, mais la façon de l'obtenir est très différente de celle de Cavalieri.

Calcul de volumes

Cavalieri a utilisé la même approche pour calculer le volume de divers solides. Le principe des indivisibles s'énonce alors comme suit :

Si deux solides sont compris entre deux plans parallèles et si toutes les intersections de ces solides avec un plan parallèle aux deux premiers ont même aire, alors les solides ont même volume.

On peut illustrer la signification de ce théorème à l'aide d'un parallélépipède rectangle et d'un cylindre circulaire droit (figure ci-dessous). Le parallélépipède rectangle peut être conçu comme une pile de cartes rectangulaires alors que le cylindre peut être conçu comme une pile de cartes rondes. Si les piles ont même hauteur, (ou même nombre de cartes de même épaisseur), et si les cartes rondes ont la même aire que les cartes rectangulaires, les deux piles occupent des volumes égaux.



Or, le volume d'un parallélépipède rectangle est le produit de ses trois dimensions ou encore le produit de l'aire de sa base par sa hauteur, soit :

$$V = Bh$$

Par sa méthode des indivisibles, Cavalieri conclut alors que le volume du cylindre est égal au produit de l'aire de sa base par sa hauteur. L'aire de cette base étant :

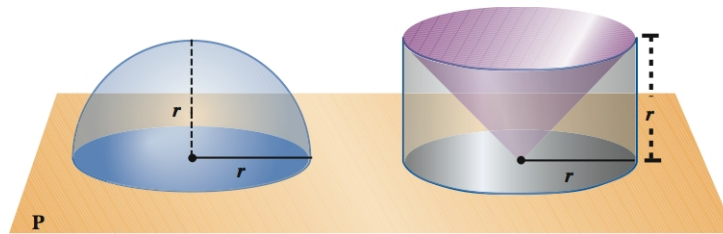
$$A = \pi r^2$$

où r est le rayon de la base du cylindre. Le volume du cylindre est donc :

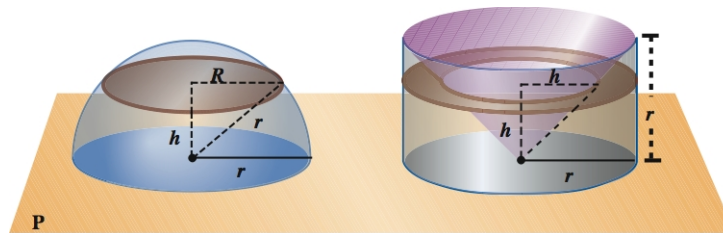
$$V = \pi r^2 h$$

VOLUME DE LA SPHÈRE

Cavalieri a utilisé ce même principe pour calculer le volume d'une sphère et sa façon de procéder n'est pas sans rappeler celle d'Archimède. Il a considéré une demi-sphère et un cylindre de rayon r et tel que la hauteur du cylindre soit égale au rayon r . Il a de plus imaginé que le cylindre était creusé en forme de cône inversé tel qu'illustré par la figure suivante.



Dans cette figure, les deux solides sont compris entre deux plans parallèles puisque la hauteur du cylindre est égale au rayon de la sphère. Imaginons maintenant un plan parallèle au plan P , coupant les deux solides, et dont la distance au plan P est égale à h . L'intersection de ce plan avec la demi-sphère donne un cercle et l'intersection avec l'autre solide donne un anneau.



Comparons l'aire du cercle et l'aire de l'anneau. Le rayon du cercle est un côté de l'angle droit du triangle rectangle dont un des côtés est h et l'hypoténuse est r . Le rayon du cercle est donc :

$$R = \sqrt{r^2 - h^2}$$

et son aire est $A = \pi(r^2 - h^2)$.

L'aire de l'anneau est obtenue en faisant la différence de l'aire du cercle extérieur et du cercle intérieur. Le cercle extérieur a le même rayon que le cylindre et son aire est :

$$A_1 = \pi r^2.$$

Le rayon du cercle intérieur de l'anneau est h puisque le rayon et la hauteur du cône sont égaux. L'aire du cercle intérieur est donc :

$$A_2 = \pi h^2$$

et l'aire de l'anneau est :

$$A = A_1 - A_2 = \pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2).$$

L'intersection du plan avec la demi-sphère aura toujours la même aire que son intersection avec le cylindre de creux conique. Cavalieri en conclut donc que le volume de la demi-sphère est égal à la différence des volumes du cylindre et du cône. Or, le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur r est :

$$V_{\text{cylindre}} = \pi r^3$$

et le volume d'un cône est le tiers du volume du cylindre de même rayon et de même hauteur. Le volume de la demi-sphère est donc :

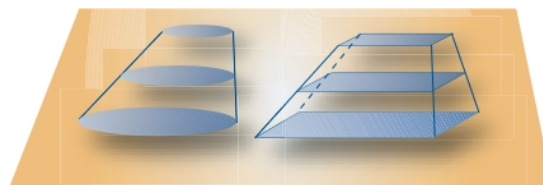
$$V_{s/2} = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

et le volume de la sphère est :

$$V_s = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Dans cet exemple, les sections ont la même aire, mais la méthode peut également être utilisée lorsque les aires sont dans un même rapport. C'est ce qu'indique la proposition suivante, connue sous le nom de *Théorème de Cavalieri* et utilisée en stéréométrie, domaine de la géométrie qui a pour objet la mesure des solides naturels.

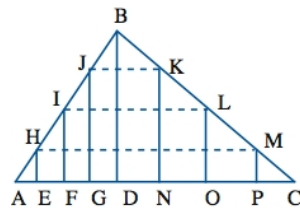
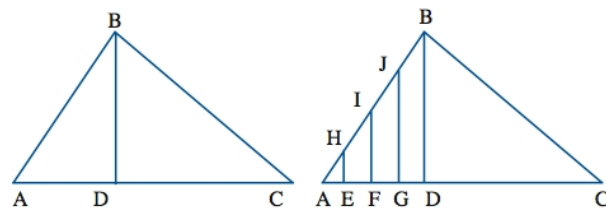
Si deux solides ont même hauteur et si des sections qui sont obtenues par des plans parallèles aux bases et à égale distance de celles-ci sont toujours dans un rapport donné, alors les volumes des deux solides sont aussi dans le même rapport.



La méthode des indivisibles permet indéniablement d'obtenir des résultats qui sont corrects dans certaines situations, mais elle a été très critiquée pour son manque de rigueur.

Manque de rigueur

Plusieurs de ces critiques sont liées au fait que les indivisibles ne sont jamais clairement définis. Le suisse Paul Guldin (1577-1642) a présenté les plus sévères critiques, imaginant même un exemple illustrant que la méthode des indivisibles donne parfois des résultats erronés. Il montre que la méthode des indivisibles permet de conclure que dans un triangle ABC dont les côtés AB et BC sont inégaux, la hauteur BD divise le triangle en deux triangles de même aire. En effet, des coupes horizontales comme JK , IL et HM déterminent des segments indivisibles verticaux égaux deux à deux, les triangles ABD et BCD ont donc même aire.



En construisant ce paradoxe, Guldin montre que la méthode des indivisibles manque de rigueur. La critique de Guldin est analogue à celle présentée pour la méthode de la balance d'Archimède. Ce dernier était conscient que la méthode utilisée pouvait donner lieu à un résultat erroné et prenait soin de confirmer ce résultat par une démonstration en utilisant la *méthode d'exhaustion*.

La démarche de Cavalieri pour calculer le volume de la sphère était connue de Galilée, car il l'utilise pour présenter un de ses paradoxes concernant l'infini ou plus spécifiquement sur la limite d'un processus. C'est par la bouche d'un des protagonistes du *Dialogue sur deux systèmes du monde*, dans lequel il fait l'éloge du système héliocentrique copernicien, qu'il présente ce paradoxe. Salvati fait remarquer que l'anneau circulaire est égal au cercle. Cependant, à la limite, le cercle devient un point et l'anneau circulaire devient un cercle. Le rayon de la sphère étant arbitraire, on peut conclure que tous les cercles, quelle que soit leur dimension, ont une circonférence égale et que chacune de ces circonférences est égale à un point. En réalité, ce ne sont pas les figures qui sont égales, mais la mesure de leur aire, et la mesure de l'aire du point est nulle tout comme celle de la circonférence.

La méthode des indivisibles a permis d'obtenir différents résultats corrects, mais la façon même dont étaient obtenus ces résultats laissait place à la critique parce que cette méthode pouvait aussi générer des résultats faux.

GILLES PERSONNE DE ROBERVAL

Gilles Personne de Roberval est né le 10 août 1602 à Senlis en France. Il est mort le 27 octobre 1675 à Paris. Il faisait partie du groupe de savants qui se rencontraient dans la cellule du père Marin Mersenne. Il était en fait le seul mathématicien professionnel du groupe. Il enseigna d'abord la philosophie au collège Gervais de Paris puis les mathématiques au collège Royal durant 40 ans. Le mandat du titulaire de la chaire de mathématiques au collège Royal était de trois ans et les candidats devaient se soumettre à un concours préparé par le titulaire sortant. Roberval, ne publiant pas les résultats de ses travaux, pouvait ainsi préparer un concours sur des problèmes qu'il avait déjà résolus, ce qui lui permettait de remporter le concours à chaque fois. Cependant, le fait de ne pas publier

les résultats de ses travaux a eu pour effet de le plonger souvent dans des disputes sur la priorité de découvertes mathématiques.

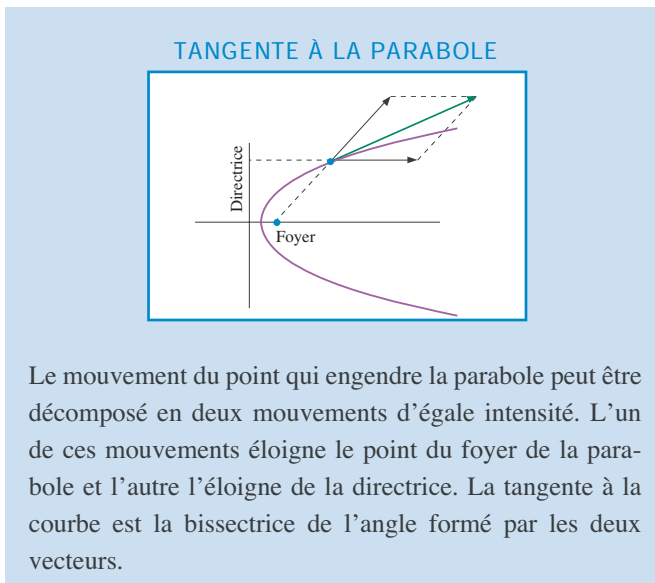
Roberval a développé diverses méthodes qui lui ont permis de calculer l'aire sous la courbe de $\sin x$ et de la cycloïde et il a calculé la longueur d'arc d'une spirale. Il est renommé pour ses découvertes sur les courbes planes et pour sa méthode pour tracer la tangente à une courbe basée sur la notion de compositions des mouvements qui, selon Boyer, avait déjà été employée par Archimède, Galilée et Descartes et qui a fait l'objet d'une dispute avec Torricelli. Roberval a produit deux traités de géométrie analytique inspirés des travaux de François Viète et de ceux de René Descartes. Dans ces ouvrages, il s'intéresse à deux problèmes : la représentation de lieux géométriques à l'aide d'équations et l'intersection de lieux géométriques dans la résolution d'équations. Il est également l'auteur d'un traité de géométrie élémentaire utilisé au Collège Gervais.

Roberval et la tangente

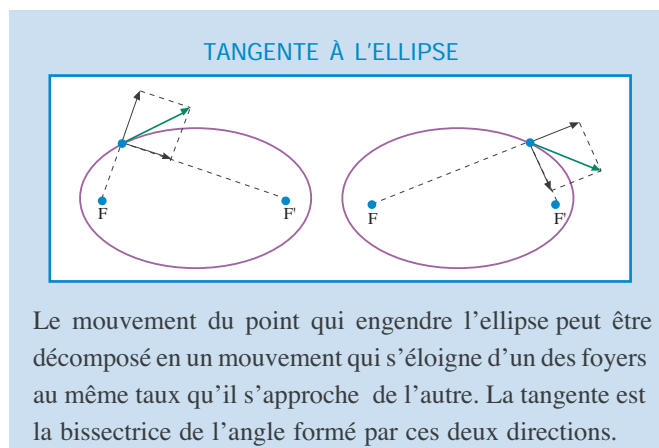
Roberval a développé une méthode originale pour tracer les tangentes, méthode qui a été publiée dans les Mémoires de l'Académie des Sciences mais dont le contenu était, semble-t-il, déjà enseigné au Collège Royal. Par cette méthode, il considère que la direction du mouvement d'un point qui décrit une courbe est la tangente à cette courbe. La direction de ce mouvement est cependant la composition de deux mouvements qui sont spécifiques à la courbe. En d'autres mots, toute courbe est engendrée par la composition de deux mouvements et la tangente est la bissectrice de l'angle formé par les directions de ces deux mouvements.



Ainsi, la parabole est engendrée par un point qui est animé de deux mouvements d'égal intensité. L'un de ces mouvements éloigne le point du foyer et l'autre mouvement l'éloigne de la directrice. La tangente est la bissectrice de l'angle formé par ces deux directions. En langage moderne, on dirait que la courbe est engendrée par la composition de deux mouvements que l'on peut décrire par des vecteurs vitesse de même intensité et la bissectrice est la résultante de ces deux vecteurs.



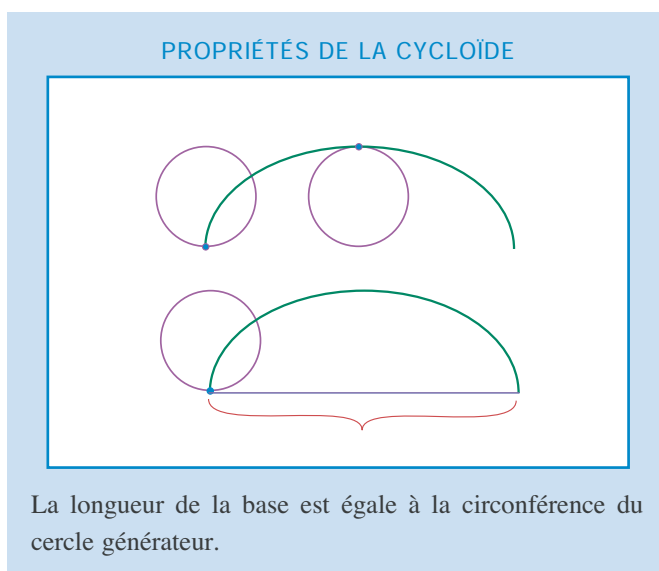
L'ellipse est engendrée par un point qui s'éloigne d'un des foyers au même taux qu'il s'approche de l'autre. La tangente est la bissectrice de l'angle formé par ces deux directions.



Roberval a utilisé cette méthode pour trouver les tangentes aux coniques et à différentes courbes comme la quadratrice, la cissoïde, la spirale et la cycloïde. Cette méthode a également été utilisée par Torricelli, ce qui a donné lieu à une dispute sur la priorité de la découverte.

CYCLOÏDE

Roberval s'est particulièrement intéressé à la courbe appelée *cycloïde*. Cette courbe est le lieu décrit par un point sur la circonférence d'un cercle qui roule en ligne droite. Elle fut étudiée pour la première fois par Nicolas de Cuse (1401-1464) dans une tentative pour trouver l'aire d'un cercle. C'est Marin Mersenne qui en a donné une définition satisfaisante et qui a énoncé les propriétés évidentes comme le fait que la longueur de la base est égale à la circonférence du cercle générateur. Il tenta de trouver l'aire sous la courbe mais, n'y parvenant pas, il a posé le problème à d'autres mathématiciens.

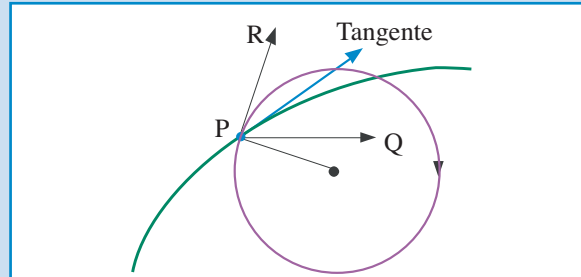


C'est Galilée qui a nommé la courbe en 1599. Il a tenté de trouver l'aire sous la courbe en la comparant à celle du cercle générateur. Ne réussissant pas à trouver une méthode mathématique, il décida de peser des pièces de métal découpées sous forme de cycloïde. Il trouva ainsi que le rapport des masses était approximativement de 3 à 1. Mais il émit la conjecture que ce rapport n'était pas exactement de 3 à 1 mais devait plutôt être un nombre irrationnel voisin de 3.

C'est en 1628 que Mersenne proposa le problème de la cycloïde à Roberval, Descartes et Fermat. Descartes qui avait développé une méthode algébrique pour trouver la tangente à la cycloïde mit Roberval et Fermat au défi d'en faire autant. Fermat parvint à développer une telle méthode alors que Roberval mit au point un procédé mécanique basé sur la composition du mouvement de translation et du mouvement de rotation du point engendrant la courbe. Torricelli avait indépendamment développé une méthode pour trouver l'aire sous la cycloïde et Viviani pour en tracer la tangente.

Pour trouver la tangente à la cycloïde, Roberval a recours à la composition des mouvements. Le point qui engendre la cycloïde est animé d'un mouvement de translation horizontale dans la direction PQ et d'un mouvement de rotation suivant la tangente au cercle générateur, soit dans la direction PR . La tangente à la cycloïde est la bissectrice de l'angle formé par ces deux mouvements.

TANGENTE À LA CYCLOÏDE
PAR LA MÉTHODE DE ROBERVAL



Le point P est animé d'un mouvement de translation horizontale dans la direction PQ et d'un mouvement de rotation suivant la tangente au cercle générateur. La direction de la tangente à la cycloïde est dans la direction de la bissectrice de l'angle RPQ.

En 1658, Pascal, après un long épisode consacré à la religion, s'intéressa à nouveau aux mathématiques pour oublier la douleur d'une rage de dents qui le tenait éveillé. Il résolut le problème de l'aire et du centre de gravité d'un segment quelconque de la cycloïde. Il résolut également le problème du volume et de la surface du solide de révolution obtenu par la rotation de la cycloïde autour de l'axe horizontal. Christopher Wren a déterminé que la longueur de la courbe est $8r$.

Une particule qui glisse sur une cycloïde est animée d'un mouvement harmonique simple et la période est indépendante du point de départ de l'oscillation. Huygens utilisa cette propriété, qu'il avait découverte en 1673, pour construire une horloge avec un pendule décrivant un arc cycloïdal pour assurer l'isochronisme des oscillations, mais ce mécanisme était mécaniquement trop compliqué pour être pratique.

En 1696, dans son ouvrage *Acta eruditorum*, Jean Bernoulli pose aux mathématiciens de l'Europe un problème qu'il avait déjà résolu, celui de la brachistochrone. Le problème consiste à déterminer la trajectoire descendante d'un mobile qui passe d'un point A à un point B qui n'est pas situé directement en-dessous, et ce, en un minimum de temps. Jacques Bernoulli, Newton, Leibniz et l'Hospital ont démontré que la cycloïde était la trajectoire du mobile.

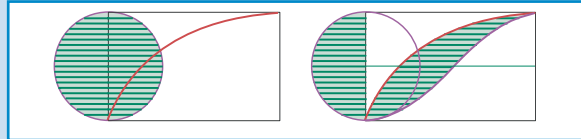
Roberval et l'aire sous la cycloïde

Roberval a d'abord déterminé, comme l'avait fait Marin Mersenne, l'aire du rectangle dans lequel est inscrite la demi-cycloïde. Cette aire est $2\pi r^2$ puisque la hauteur du rectangle est $2r$ et sa longueur est la demi-circonférence πr .

En ayant recours à sa méthode des indivisibles, il a déterminé l'aire sous la cycloïde. Pour ce faire, il considère une demi-cycloïde et son cercle générateur qu'il décompose en indivisibles. Puis, il glisse horizontalement les indivisibles de la demi-circonférence pour les aligner sur la cycloïde. L'autre

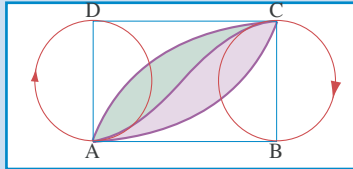
extrémité des indivisibles donne une nouvelle courbe qu'il appelle la *compagne* de la cycloïde.

CONSTRUCTION DE LA COMPAGNE
DE LA CYCLOÏDE



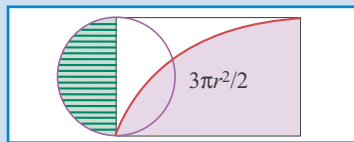
En glissant horizontalement les indivisibles de la demi-circconférence pour les aligner sur la cycloïde, l'autre extrémité des indivisibles donne une nouvelle courbe que Roberval appelle la *compagne* de la cycloïde et l'aire entre les deux courbes est égale à celle du demi-cercle.

Il se sert alors de la symétrie de la construction de la façon suivante. Il considère qu'un autre cercle roule dans le sens inverse du premier sur la partie supérieure du rectangle. Il obtient ainsi une figure symétrique formée de deux demi-cycloïdes dont l'une est inversée. Cette symétrie permet de conclure que les deux demi-cycloïdes ont la même compagne et que celle-ci bissecte l'aire du rectangle.



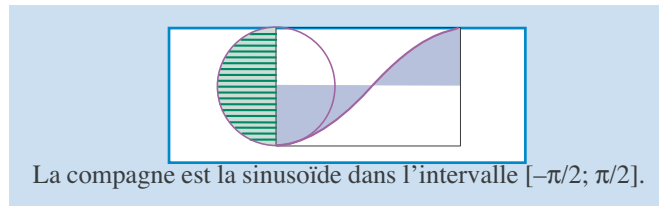
L'aire sous la compagne est la moitié de l'aire du rectangle, soit πr^2 .

Par conséquent, l'aire sous la demi-cycloïde est égale à l'aire sous la compagne plus l'aire entre la demi-cycloïde et la compagne, ce qui donne $3\pi r^2/2$ et l'aire sous la cycloïde complète est alors $3\pi r^2$.



L'aire sous la demi-cycloïde est $3\pi r^2/2$, celle sous la cycloïde est donc $3\pi r^2$.

La courbe que Roberval appelle la *compagne* de la cycloïde est en fait une sinusoïde. C'est la première fois dans l'histoire qu'une sinusoïde était tracée.



CONCLUSION

L'histoire de la cycloïde illustre à quel point les mathématiciens ont fait preuve de créativité pour résoudre les problèmes qui leur étaient proposés. La décomposition du mouvement d'un point en deux mouvements de même intensité dont la bissectrice est la tangente à la courbe engendrée par le déplacement du point est très intéressante même si elle ne peut se généraliser à toutes les courbes puisque les deux mouvements à considérer sont spécifiques à la courbe. Chaque courbe est alors un cas particulier.

La méthode de calcul de l'aire sous la cycloïde est assez ingénieuse d'un point de vue géométrique, mais elle n'est pas adaptable à d'autres types de courbes. En mathématiques, la recherche de méthodes générales utilisables pour résoudre des classes entières de problèmes est un facteur important d'évolution. Néanmoins, même si une méthode n'atteint pas le but visé, elle permet de faire progresser la recherche et contribue ainsi à construire la connaissance générale.

L'avènement de la géométrie analytique avec Descartes et Fermat va permettre le développement de méthodes strictement algébriques pour déterminer la tangente à une courbe et l'aire sous une courbe.

BIBLIOGRAPHIE

Ball, W. W. R. *A Short Account of History of Mathematics*, New York, Dover Publications, Inc., 1960, 522 p.

Boyer, Carl B. *A History of Mathematics*, New York, John Wiley & Sons, 1968, 717 p.

Collette, Jean-Paul. *Histoire des mathématiques*, Montréal, Éditions du Renouveau Pédagogique Inc., 1979, 2 vol., 587 p.

Kline Morris. *Mathematics, a cultural approach*, Reading, Mass, Addison-Wesley, 1962, 70 p.

Les génies de la science, Pour la science, Kepler, Le musicien du ciel, Trimestriel août 2001 – novembre 2001.

Les génies de la science, Pour la science, Galilée, novembre 1999.