Liste des projets

Version du
15 janvier 2010

1) Line Baribeau

Des courbes qui remplissent le plan et autres bizarreries

En 1878, Georg Cantor en surprend plus d'un en construisant un exemple d'une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$. Peu de temps après, Peano et Hilbert construisent des surjections continues de l'intervalle $I = [0, 1]$ sur le carré I^2 – des courbes d'intérieur non vide ! Il est aussi possible de construire des courbes où chaque point de l'image soit infiniment ramifié.

Le projet consistera à répertorier et analyser des constructions contrintuitives classiques de ce type, tout en les situant dans l'histoire du développement de l'analyse.

Bibliographie

[1] H. Sagan, *Space-Filling Curves*, Springer-Verlag, New York, 1994, 193 p.

2) Claude Bélisle → **David Goulet**

Marches aléatoires et réseaux électriques.

Une particule se déplace sur $\mathbb{Z}^d$ de la façon suivante. À chaque unité de temps, la particule fait un pas de longueur unité vers un des $2d$ sites qui lui sont voisins. À chaque pas, le site vers lequel la particule se déplace est choisi au hasard, chaque site voisin ayant probabilité $1/2d$ d'être choisi. Ce modèle s'appelle la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$. En 1921, la mathématicien hongrois George Pólya a montré que si d vaut 1 ou 2, cette marche aléatoire est récurrente alors que si d est plus grand ou égal à 3, elle est transitoire. Ici, récurrente veut dire qu'il est certain que la particule reviendra un jour à son point de départ alors que transitoire veut dire qu'il y a une probabilité strictement positive que la particule ne reviendra jamais à son point de départ. Il existe un lien entre les marches aléatoires et les réseaux électriques. Le but du projet sera de décrire ce lien et d'interpréter le théorème de Pólya en termes de réseaux électriques.

Processus de files d'attente.

Des clients arrivent à un centre de service avec une intensité de μ clients par unité de temps. Ce centre de service comprend m comptoirs de service. Lorsque les m serveurs sont occupés, les clients qui arrivent forment une file d'attente unique. Dès qu'un serveur se libère, le prochain client s'amène au comptoir. On suppose que chacun des m serveurs peut servir les clients au même taux de μ clients par unité de temps. On s'intéresse au comportement asymptotique de $X(t)$, le nombre de clients dans le système au temps t. Ce modèle est un exemple assez simple d'une grande famille de processus aléatoires appelés processus de files d'attente. Sous certaines conditions ces systèmes sont stables : on a convergence vers un certain équilibre stochastique. Le but du projet sera d'étudier certains aspects de la théorie générale des files d'attente pour ensuite examiner certains modèles particuliers.

3) Hugo Chapdelaine → **Julie Desjardins**

Théorie de Galois

4) Nicolas Chevrot → **Ludovick Gagnon**

Les séries de Fourier

5) Jean-Marie De Koninck → **Maurice-Étienne Cloutier, Jean-François Nolet**

Théorie analytique des nombres

6) Thierry Duchesne

Intégration par des méthodes de Monte-Carlo

Méthodes d'intégration numériques basées sur les chaînes de Markov.

L'évaluation numérique d'intégrales de fonctions de plusieurs variables par les méthodes de quadrature est sujette au "fléau de la dimension" : l'atteinte d'une précision raisonnable dans l'évaluation de l'intégrale demande rapidement un nombre de calculs démesuré lorsque le nombre de variables dans la fonction à intégrer augmente.

En statistique bayésienne, où le calcul de la loi a posteriori implique souvent des intégrales en haute dimension, les méthodes d'intégration numériques par simulation de chaînes de Markov représentent une solution pratique intéressante. Dans ce projet, nous étudions les principaux algorithmes de simulation permettant de résoudre de telles intégrales et appliquons la méthode à l'analyse de données sur la trajectoire criminelle de jeunes contrevenants.

7) Christian Genest → **Mélinda Laflamme**

Le paradoxe de Stein

La moyenne échantillonnale est le meilleur estimateur de l'espérance d'une loi normale ; elle minimise entre autres l'erreur quadratique moyenne. Si ce problème d'inférence se présente à k reprises pour des populations normales indépendantes, il semble donc naturel d'estimer chaque espérance par la moyenne échantillonnale correspondante.

Curieusement, cette stratégie est sous-optimale dès que $k \geq 3$. Comme Charles Stein l'a démontré en 1955, il existe des estimateurs dont l'erreur quadratique moyenne totale est plus faible que celle liée à l'approche naïve. Un exemple d'estimateur de ce type a été proposé en 1961 par James et Stein.

L'objectif du projet sera de se familiariser avec le paradoxe de Stein et d'étudier les propriétés de l'estimateur de James–Stein. Pour ce faire, on fera appel au calcul de plusieurs variables et à des algorithmes de simulation.

Bibliographie

[1] B. Efron, *Biased versus unbiased estimation*, Adv. Math. 16 (1975), 259–277.

[2] B. Efron, *Controversies in the foundations of statistics*, Amer. Math. Month. 85 (1978), 231–246.

8) Frédéric Gourdeau, Yemon Choi → **Caroline Arsenault**

Transformations de la sphère : isométries, cartographie et pavage

9) Robert Guénette → **François Poudrier**

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

Algorithme de bases, préconditionnement, méthodes de Krylov, étude informelle de la convergence, applications et calculs sous Matlab.

Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Motivation, propriétés, calcul de la décomposition, algorithme de Golub-Kahan, applications à la compression d'images.

Problème de l'ordonnancement des pages web (PageRank)

Position du problème, contexte informatique, notion de chaîne de Markov, matrice de transition, problème de valeurs propres, algorithme de calcul de la valeur propre dominante, applications et illustration.

10) Bernard Hodgson → **Patrick Bilodeau**

À venir

11) Michael Lau → **Alexandre Lemire Paquin, Patrick Munroe,**
→ **Jean-Sébastien Lechasseur**

Sous-algèbres de Cartan

Les algèbres de Lie sont des structures algébriques sur les espaces tangents aux surfaces multi-dimensionnelles. Leurs actions sur les espaces vectoriels sont déterminées par certaines sous-algèbres très importantes, qui s'appellent *sous-algèbres de Cartan*. Le but du projet sera de comprendre le rôle des sous-algèbres de Cartan dans la structure d'une algèbre de Lie et d'étudier quand les « automorphismes intérieurs »agissent transitivement sur l'ensemble de toutes les sous-algèbres de Cartan. Ce projet mène directement aux problèmes ouverts et accessibles au niveau du deuxième cycle !

Bibliographie

[1] Fulton et Harris, *Representation Theory : A First Course*.

Correspondence de McKay

Les sous-groupes finis Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (le groupe des matrices 2×2 avec entrées complexes et de déterminant 1) sont en bijection avec certains graphes (les diagrammes de Dynkin). Cette correspondence associe les groupes Γ avec des objets géometriques (orbifolds) et des objets combinatoires (invariants polynomiaux). Ces observations ont mené aux résultats importants en algèbre, en géométrie, et en physique théorique. Le but de ce projet sera de mieux comprendre cette correspondence afin d'examiner une nouvelle famille des algèbres qui proviennent de la théorie de Lie.

Bibliographie

[1] Hoboken, Joris, **thèse de maîtrise**, 2002.

12) Claude Levesque → **Simon Fortin**

Sur les plans projectifs d'ordre n

Un plan projectif d'ordre n est la donnée de $n^2 + n + 1$ points et $n^2 + n + 1$ droites ayant la propriété que chaque droite possède $n + 1$ points et en chaque point passent $n + 1$ droites. Il s'agit de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour avoir un tel plan projectif en termes de matrices d'incidence, de carrés latins, et de designs. On utilisera Maple pour donner des exemples.

13) Hassan Manouzi

Résonance stochastique

La résonance stochastique est un phénomène par lequel la transmission d'un signal utile ou cohérent, par certains systèmes non linéaires, peut être améliorée par l'augmentation du bruit appliqué au système .

Cet effet non linéaire paradoxal a originellement été introduit, il y a une quinzaine d'années, dans le contexte de la dynamique des climats, afin d'expliquer la récurrence régulière des ères glaciaires. La survenue des ères glacières résulte d'une interaction non linéaire entre une cause périodique due aux mouvements planétaires (signal cohérent) et une cause aléatoire due aux perturbations atmosphériques et climatiques (bruit), et pour lesquelles il apparaît que l'influence, sur le résultat, de la cause cohérente périodique peut être renforcée en augmentant la cause aléatoire.

Depuis ce point de départ, l'étude de la résonance stochastique s'est d'abord développée pour le cas de la transmission d'un signal périodique par certains systèmes dynamiques non linéaires bistables. Progressivement, le phénomène a été mis en évidence dans différents systèmes de ce type, incluant des circuits électroniques , des lasers, la résonance paramagnétique électronique , des neurones, des composants supraconducteurs, ...

But de ce travail : Il s'agit d'étudier ce phénomène à travers la résolution d'une classe d'équations différentielles stochastiques.

14) Javad Mashreghi → **Pierrot Jesse Fillion**

Lemme de Schwarz et ses applications

Théorèmes d'unicité pour les produits de Blaschke finis

15) Roger Pierre

Périmètre de courbes et calcul de π

En reprenant une idée fascinante de K. Gauss, R. Brent et E. Salamin on développé un algorithme pour calculer « facilement » le nombre π. Le véritable intérêt de leur approche est qu'elle se généralise au calcul de $e^x, \ln x$ etc... Un peu de géométrie des courbes, un peu d'analyse, un peu d'analyse numérique...

Bibliographie

[1] E. Salamin, *Computation of pi Using Arithmetic-Geometric Mean*, Mathematics of Computation 30 (135) : 565 à 570.

[2] N. Lord, *Recent Calculations of* π *: The Gauss-Salamin Algorithm*, The Mathematical Gazette, Vol. 76, No. 476 (Jul., 1992), pp. 231-242.

16) Thomas Ransford → **Jean-François Bouchard**

Extrapolation

Le but du projet est d'étudier une méthode d'accélération de la convergence des suites. Il s'agit du ϵ-*algorithme*, une technique remarquable pour sa simplicité et son efficacité.

À titre d'exemple, considérons la série

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots .$$

Elle converge vers $\pi/4$ (en effet, il s'agit du développement de $\arctan(x)$ en $x = 1$). Mais la convergence est *très* lente. Voici les dix premières sommes partielles :

1.0000000000
0.6666666667
0.8666666667
0.7238095238
0.8349206349
0.7440115440
0.8209346209
0.7542679542
0.8130914836
0.7604599046

Ce n'est guère très encourageant. Cependant, en appliquant le ϵ-algorithme à ces données, on obtient 0.7853983280, qui est égal à $\pi/4$ à six places décimales près !

Pourquoi cet algorithme marche-t-il si bien ? La réponse réside dans la théorie de l'approximation par des fonctions rationnelles, et le projet consistera à élucider cette théorie et son lien avec l'algorithme. Il y aura aussi l'occasion de faire des expériences avec l'algorithme.

Bibliographie

[1] A. Sidi, *Practical Extrapolation Methods*, Cambridge University Press, 2003.

[2] P. Wynn, « On the convergence and stability of the epsilon algorithm », *J. SIAM Numer. Anal.* 3 (1966), 91–122.

17) Louis-Paul Rivest

À venir

18) José Urquiza → **Dominique Maheux, Éloïse Boiteau**

Méthode des différences finies et contrôle de l'équation des ondes

L'objectif est de discrétiser l'équation des ondes unidimensionnelle par une méthode de différences finies et d'appliquer quelques aspects de la théorie de la commande au système d'équations différentielles qui en résultent. Le projet nécessite un peu de programation avec Matlab et une initiation à la commande des systèmes linéaires.

Modélisation pour l'élevage des pétoncles et des moules

L'objectif est de modéliser la croissance (de la densité et de la masse moyenne) de pétoncles ou de moules en proposant un système d'équations différentielles capables de représenter fidèlement des résultats d'expériences menées par un collaborateur biologiste. Le projet nécessite une initiation à la modélisation de la dynamique des populations par des équations différentielles ordinaires et la résolution numérique de ces systèmes sur Matlab avec des programmes existants.